

4228. Az adott körök $k_1: x^2 + (y-3)^2 = 3$ és $k_2: (x-1)^2 + y^2 = 1$. $K_1(0; 3)$, $r_1 = \sqrt{3}$, $K_2(1; 0)$, $r_2 = 1$. $K_1K_2 = \sqrt{10} > 1 + \sqrt{3}$, a két körnek nincs közös pontja. Legyen $P(x; y)$. Az egyenlő hosszú érintőszakaszokra felírhatjuk a következő egyenletet: $x^2 + (y-3)^2 - 3 = (x-1)^2 + y^2 - 1$. Innen $e: x - 3y + 3 = 0$. A P pont a kapott egyenesen fut végig. Vegyük észre, hogy $e \perp K_1K_2$.

4229. Az $ABCD$ téglalap csúcsai: $A(1; -4)$, $B(9; 12)$, $C(5; 14)$, $D(-3; -2)$. Ugyanis $\vec{AD}(-4; 2)$, elforgatva -90° -kal $\mathbf{v}(2; 4)$. $\vec{OB} = 4\mathbf{v} + \vec{OA}$, ahol O az origó. $\vec{OB}(9; 12)$. Az $ABCD$ köré írható kör egyenlete: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 85$. Legyen $y=0$, $d_1 = 4\sqrt{15}$, legyen $x=0$, $d_2 = 4\sqrt{19}$. Az \vec{AD} vektort $+90^\circ$ -kal elforgatva AB^*C^*D téglalapot kapunk, $d = 4\sqrt{15}$. A kör az x tengelyt nem metszi.

4230. Az adott kör középpontja: $K(0; -2)$, a sugara $r = \sqrt{5}$ egység, $PK = \sqrt{50}$ egység. Az érintőszakasz d hosszára felírhatjuk a következő egyenletet: $d^2 = 50 - 5$, $d = 3\sqrt{5}$. Az érintési pont koordinátáit az
$$\left. \begin{array}{l} (x-5)^2 + (y-3)^2 = 45 \\ x^2 + y^2 + 4y = 1 \end{array} \right\} \text{ egyenletrendszer gyökei adják. } E_1(-1; 0),$$

$E_2(2; -3)$. $E_1E_2 = 3\sqrt{2}$. Az érintők egyenletei: $e_1: x - 2y + 1 = 0$, $e_2: 2x - y - 7 = 0$.

4231. A C csúcsot az AB szakasz felezőmerőlegese metszi ki az adott körből. Két megoldás van: $C_1(1; -4)$, $C_2(4; -1)$.

4232. A keresett k kör középpontja rajta van az $x = 2$ egyenletű egyenesen és az $E(2; -4)$, $A(10; 2)$ pontokat összekötő szakasz felezőmerőlegesén. Az $x = 2$, $4x + 3y = 21$ egyenletrendszer gyökei $K\left(2; \frac{13}{3}\right)$. k egyenlete: $(x-2)^2 + \left(y - \frac{13}{3}\right)^2 = \frac{625}{9}$, mert $r = \frac{13}{3} + 4$.

4233. A P pont koordinátái: $(x; y)$.

Ekkor $(x+4)^2 + y^2 + (x-8)^2 + y^2 = 80 \Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = 16$. A kör minden pontja megfelel.

4234. Határozzuk meg az $y = \lambda(x-4)$ és az $y = -\frac{1}{\lambda}x$ egyenletű egyenesek M metszéspontjának koordinátáit. Rögtön adódik, hogy a $(0; 0)$ és a $(4; 0)$ koordinátájú pontok nem lehetnek az
$$\left. \begin{array}{l} (1) y = \lambda(x-4) \\ (2) y = -\frac{1}{\lambda}x \end{array} \right\} \text{ egyenletrendszer gyökei. Ugyanis, ha } y = 0, \text{ akkor } \lambda = 0, \text{ vagy}$$

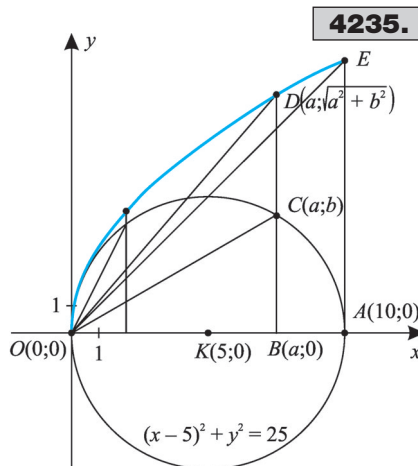
$x = 4$. De $\frac{1}{\lambda}$ miatt $\lambda \neq 0$. Ha $x = 4$, akkor $y = 0$ és a (2)-es egyenlet szerint $x = 0$ adódna, ami

ellentmondás. Feltételezve, hogy $\lambda \neq 0$, $x = \frac{4\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$, $y = -\frac{4\lambda}{\lambda^2 + 1}$. Küszöböljük ki a $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

paramétert. $x^2 + y^2 = \frac{16(\lambda^2 + \lambda)^2}{(\lambda^2 + 1)^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{16\lambda^2}{\lambda^2 + 1}$. De $\frac{16\lambda^2}{\lambda^2 + 1} = 4x$, tehát $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

A mértani hely olyan kör, amelynek középpontja a $K(-2; 0)$ pont és a sugara $r = 2$. A $(0; 0)$ és a $(4; 0)$ pontok nem tartoznak a mértani helyhez.

4235. Jelöléseinket az ábrán láthatjuk. Legyen $0 \leq b \leq 5$, akkor $0 \leq a \leq 10$. A C pont koordinátáira igaz, hogy $(a-5)^2 + b^2 = 25 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 10a = 0$. A D pont $(x; y)$ koordinátáira felírhatjuk a következő egyenlőségeket: $x = a$, $y^2 = a^2 + b^2$. De $a^2 + b^2 = 10a = 10x$, tehát $y^2 = 10x$, ahol $0 \leq x \leq 10$ és $0 \leq y \leq 10$. A mértani hely az $y^2 = 10x$ egyenletű parabolának az ábrán látható OE íve.



4235.

4236. Az érintő egyenlete $y = mx - 4$ alakú. Az egyenesnek egy közös pontja van a parabolával, ha az $mx - 4 = \frac{1}{4}x^2$ egyenlet diszkriminánsa 0. $m = \pm 2$; $y = \pm 2m - 4$.

4237. A $P(-4; -1)$ ponton átmenő egyenessereg egyenlete: $y + 1 = m(x + 4) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{y + 1 - 4m}{m}$. Az egyenes érintő, ha az $y^2 = \frac{2(y + 1 - 4m)}{m}$ egyenlet diszkriminánsa 0.

Két érintőt kapunk: $e_1: y = \frac{1}{2}x + 1$, $e_2: y = -\frac{1}{4}x - 2$.

4238. $y_1 = (3 - a)^2 - 6(3 - a) + 10 = a^2 + 1$ és $y_2 = (3 + a)^2 - 6(3 + a) + 10 = a^2 + 1$.

4239. $b = 0$, $a = -5$.

4240. Helyettesítsük az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletben az x és y helyére az adott pontok koordinátáit. A kapott egyenletrendszerből $a = 2$, $b = -8$, $c = 6$. $y = 2(x - 2)^2 - 2$. $F\left(2; -\frac{15}{8}\right)$, a

vezéregyenes egyenlete: $y = -\frac{17}{8}$, mert $p = \frac{1}{4}$, $\frac{p}{2} = \frac{1}{8}$ és a tengelypont: $C(2; -2)$.

4241. Oldjuk meg az $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = mx \end{cases}$ egyenletrendszert. $x^2 + (2 - m)x = 0$. Egy közös pont van,

ha $m = 2$. Az $y = 2x$ egyenes érinti a parabolát. Ha $m \neq 2$, az egyenes két pontban metszi a parabolát, kivéve az y tengelyt, amely a $(0; 0)$ pontban metszi a parabolát. Az $y = -\frac{1}{2}x$ egyenes-

nek a parabolával két közös pontja van. $O(0; 0)$, $M\left(-\frac{5}{2}; \frac{5}{4}\right)$, $OM = \frac{5\sqrt{5}}{4}$.

4242. Az $y = mx$ és az $y = 4x^2 + 4$ egyenletekből álló egyenletrendszernek egy megoldása van, ha $m = \pm 8$. Az érintők egyenletei: $y = \pm 8x$. $E_1(-1; 8)$, $E_2(1; 8)$.

4243. $y = (x + 1)^2 + c - 1$. A tengelypont az $x = -1$ egyenletű egyenesre illeszkedik c értékétől függetlenül. Ha $c = 1$, akkor a tengelypont $T(-1; 0)$.

4244. A $P(1; 1)$ pont koordinátái kielégítik a parabola egyenletét. Innen $b + c = 0$, $c = -b$. Az $y = x$ egyenletű egyenes érinti az $y = x^2 + bx - b$ parabolát, ha a diszkrimináns $(b - 1)^2 + 4b = 0$. $b = -1$, $c = 1$.

4245. A parabola az x tengelyt az $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$ pontokban metszi. A kör egyenlete $x^2 + (y - 4)^2 = 25$. $C(4; 7)$, $D(-4; 7)$. Az $ABCD$ trapéz területe: $t = \frac{8+6}{2} \cdot 7 = 49$ területegység.

4246. A parabola az x tengelyt a $P_1(1; 0)$ és $P_2(3; 0)$ pontokban metszi. Az érintő iránytangensét az $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ függvény deriváltjával számíthatjuk ki. $f'(x) = -2x + 4$. $f'(1) = 2$ és $f'(3) = -2$. Az érintők egyenletei: $e_1: y = 2x - 2$ és $e_2: y = -2x + 6$. Az $e_1 e_2 \sphericalangle = 53,13^\circ$.

4247. A parabola $P(a; a^2)$ pontjában az érintő iránytangense az $f'(x) = 2x$ függvénnyel számítható ki, $m_1 = 2a$. A PA egyenes iránytangense $m_2 = \frac{8 - a^2}{9 - a}$. $\vec{PA}(9 - a; 8 - a^2)$. A merőlegesség feltétele: $m_1 m_2 = -1$. $2a \cdot \frac{8 - a^2}{9 - a} = -1 \Leftrightarrow 2a^3 - 15a - 9 = 0$, $a \neq 9$. Az egyenlet bal oldala szorzattá bontható. $2(a^3 - 27) - 15(a - 3) = 0 \Leftrightarrow (a - 3)(2a^2 + 6a + 3) = 0$. Innen $a_1 = 3$, $a_2 = -0,63$, $a_3 = -2,36$. A P pontra három megoldás van. $P_1(3; 9)$, $P_2(-0,63; 0,40)$, $P_3(-2,36; 5,57)$.

4248. I. megoldás. A $P(2; -4)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete az m iránytangenssel kifejezve: $y = mx - 2m - 4$. m -et úgy kell meghatározni, hogy az $\left. \begin{array}{l} y = \frac{1}{8}x^2 \\ y = mx - 2m - 4 \end{array} \right\}$ egyenletrendszernek egy megoldása legyen. A diszkrimináns $D = 64m^2 - 4(16m + 32)$. Az egyenes érinti a parabolát, ha $D = 0$; $m_1 = 2$, $m_2 = -1$. Két érintő húzható: $y = 2x - 8$, vagy $y = -x - 2$. Az érintési pontok koordinátái: $T_1(8; 8)$, $T_2(-4; 2)$. a) Ekkor $2 = \frac{-4 + 8}{2}$ igaz állítás. b) $F(0; 2)$. $PF = \sqrt{40}$, $T_1F = 10$, $T_2F = 4$. Valóban $PF = \sqrt{T_1F \cdot T_2F}$.

II. megoldás. Az érintő iránytangensét az $f(x) = \frac{1}{8}x^2$, $x \in \mathbf{R}$ függvény derivált függvényével is meghatározhatjuk. $f'(x) = \frac{1}{4}x$. A $T(a; a^2)$ pontban $f'(a) = m = \frac{a}{4}$. $\vec{PT}\left(a - 2; \frac{1}{8}a^2 + 4\right)$.

A PT érintő iránytangense: $\frac{\frac{1}{8}a^2 + 4}{a - 2} = \frac{a}{4}$. Innen $a_1 = 8$, $a_2 = -4$. $T_1(8; 8)$, $T_2(-4; 2)$.

4249. Két érintőt kapunk. $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}x - \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} - 1$. Vegyük észre, hogy $m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \Rightarrow$ az érintők merőlegesek egymásra. P a vezéregyenesen van.

4250. Az $y = 3x^2 - 4$ egyenletű parabolát az $y = 2x + b$ egyenletű egyenes két pontban metszi, ha $13 + 3b > 0$. Ekkor a metszéspontok abszcisszái:

$x_1 = \frac{1 + \sqrt{13 + 3b}}{3}$ és $x_2 = \frac{1 - \sqrt{13 + 3b}}{3}$. A húr felezőpontjának első koordinátája:

$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{3} =$ állandó. A mértani hely az $x = \frac{1}{3}$ egyenletű egyenesnek a parabola belsejébe eső pontjai. Olyan pontok, amelyek második koordinátája $y > 3 \cdot \frac{1}{9} - 4$, $y > -\frac{11}{3}$.

4251. A $P(u; v)$ ponton átmenő egyenesek paraméteres egyenlete: $y = mx + v - mu$, ahol $m \in \mathbf{R}$ és $u < 0$. Az egyenes érinti a parabolát, ha az $\left. \begin{array}{l} y^2 = 2px \\ y = mx + v - mu \end{array} \right\}$ egyenletrendszernek

egy megoldása van és $m \neq 0$. Az $y = \frac{my^2}{2p} + v - mu$ egyenlet diszkriminánsa 0 kell legyen.

(1) $D = 4p^2 - 4m(2pv - 2pum) = 0$. (1) egyenletből $4p \neq 0$ -val egyszerűsítve:

(2) $2um^2 - 2vm + p = 0$ adódik. (2) egyenletnek m -re két valós gyöke van, mert a diszkrimináns $4(v^2 - 2pu) > 0$. 0 akkor lenne, ha az $(u; v)$ pont parabolapont lenne, de a P pont a parabola külső pontja, ezért $v^2 > 2pu$. A $P(u; v)$ pontból húzott érintők pontosan akkor merőlegesek egymásra, ha $m_1 m_2 = -1$. A (2)-es egyenletből $m_1 m_2 = \frac{p}{2u}$, $\frac{p}{2u} = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{p}{2}$. A derékszög csúcsának mértani helye a parabola vezéregyenese.

V

Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
A kiadásért felel: Jókai István vezérigazgató
Raktári szám: 16127/II
Felelős szerkesztő: Szloboda Tiborné
Műszaki igazgató: Babicsné Vasvári Etelka
Műszaki szerkesztő: Wéber Andrea
Grafikai szerkesztő: Villám Péter
Terjedelem: 52,91 (A/5) ív
1. kiadás, 2005
Formakészítés: Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Stúdió